AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA
IM. STANISŁAWA STASZICA W KRAKOWIE

Wytrzymałość Materiałów

Ugięcia belek

Linia ugięcia belki, warunek sztywności, metoda Clebscha

Wydział Inżynierii Mechanicznej i Robotyki

Katedra Wytrzymałości, Zmęczenia Materiałów i Konstrukcji

dr hab. inż. Kinga Nalepka

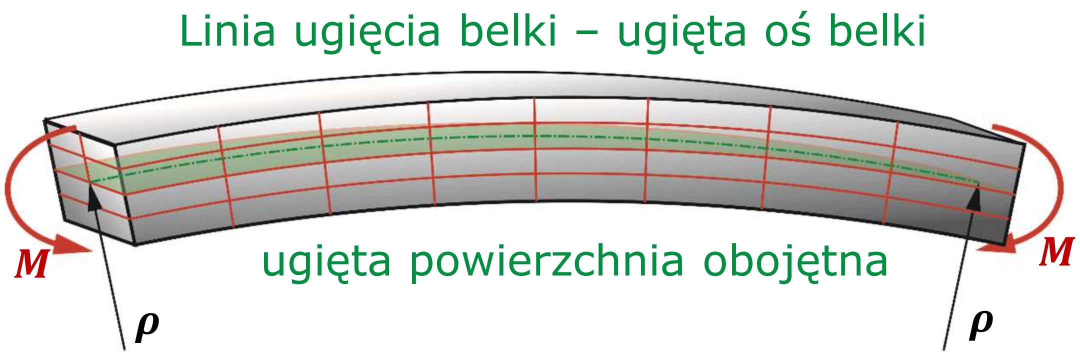
B2, III p., pok. 312

e-mail: knalepka@agh.edu.pl **tel. 12 617 30 98**

http://zwmik.imir.agh.edu.pl/dydaktyka/dla_studentow/imir/imir.html

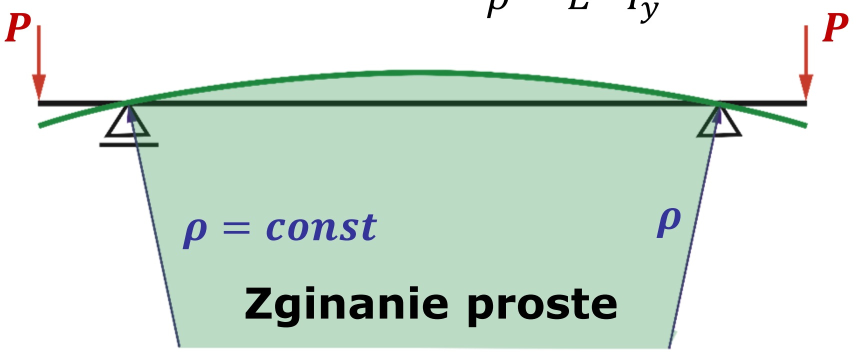
Linia ugięcia
Zginanie proste i poprzeczne

Zginanie proste



ρ – promień krzywizny linii ugięcia

Krzywizna linii ugięcia: $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I_y}$



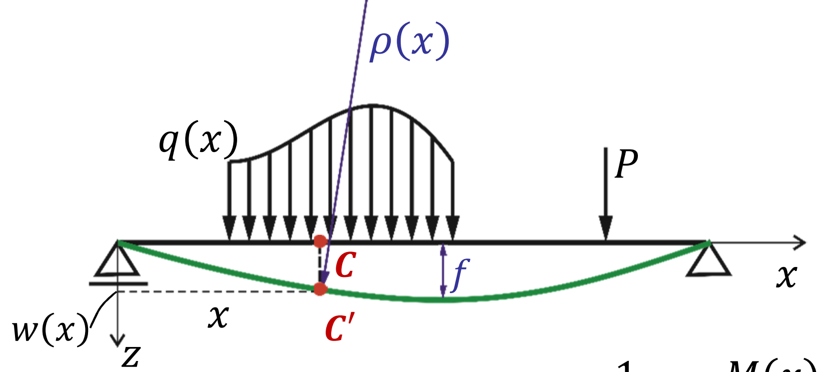
Zginanie poprzeczne

$w(x)$ - linia ugięcia

f – strzałka ugięcia: maksymalna bezwzględna wartość ugięcia

Warunek bezpieczeństwa

$f \leq f_{dop}$ $\quad f_{dop}$ - dopuszczalne przemieszczenie



Krzywizna linii ugięcia: $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{M(x)}{E \cdot I_y}$

Krzywizna funkcji $w(x)$: $\frac{1}{\rho(x)} = \frac{|w''(x)|}{\left[1 + \left(w'(x)\right)^2\right]^{3/2}}$

Równanie różniczkowe linii ugięcia
Kąt ugięcia

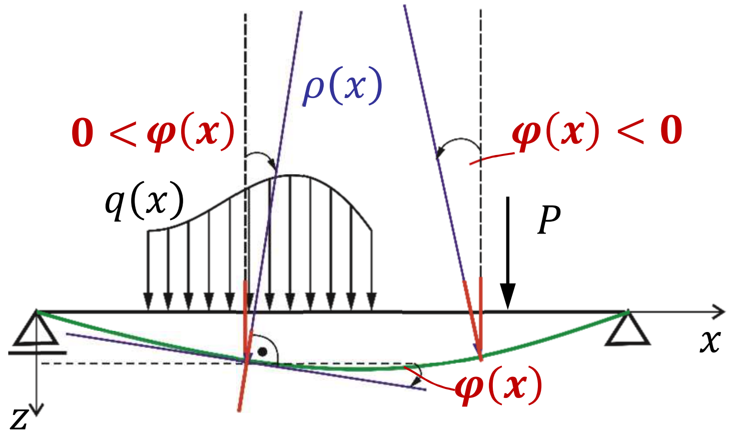
Eliminując krzywiznę otrzymujemy związek:

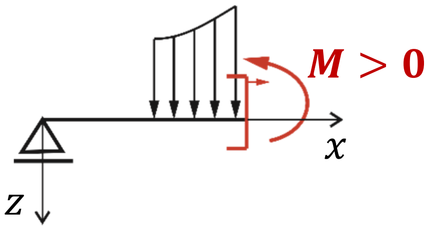
$$\frac{M(x)}{E \cdot I_y} = \frac{|w''(x)|}{\left[1 + \left(w'(x)\right)^2\right]^{3/2}}$$

Zgodnie z liniową teorią sprężystości rozważamy małe przemieszczenia punktów belki (względem jej długości) oraz małe pochodne przemieszczeń:

$$\left(w'(x)\right)^2 \cong 0$$

$$\Rightarrow |w''(x)| = \frac{M(x)}{E \cdot I_y}$$





Dodatni moment wywołuje linię ugięcia o ujemnej drugiej pochodnej

Ostateczny związek linii ugięcia z momentem zginającym:

$$w''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I_y}$$

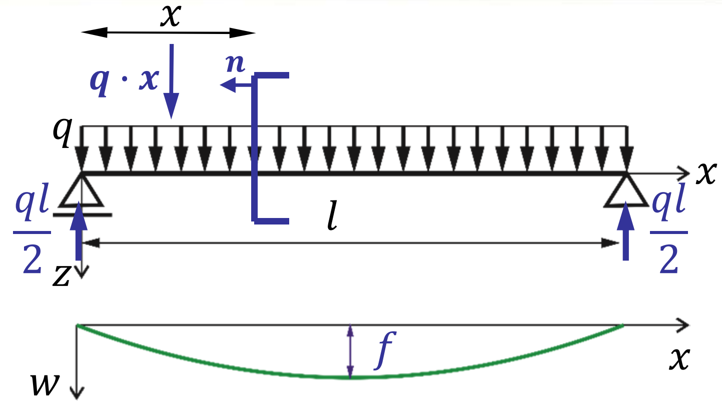
Kąt ugięcia – kąt obrotu przekroju poprzecznego mierzony zgodnie z ruchem wskazówek zegara od położenia pierwotnego do finalnego, po obciążeniu.

$$\varphi(x) \cong \tan\varphi(x) = w'(x)$$

Wyznaczanie linii ugięcia
Warunki brzegowe

Przykład 1

$$w''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I_y}$$



$$-EI_y w''(x) = \underbrace{\frac{1}{2}qlx - \frac{1}{2}qx^2}_{M(x)}$$

$$-EI_y w'(x) = C + \frac{1}{4}qlx^2 - \frac{1}{6}qx^3$$

$$-EI_y w(x) = D + Cx + \frac{1}{12}qlx^3 - \frac{1}{24}qx^4$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow D = 0$$

$$w(l) = 0 \quad \Rightarrow Cl + \frac{1}{12}ql^4 - \frac{1}{24}ql^4 = 0$$

$$\Rightarrow C = -\frac{1}{24}ql^3$$

Linia ugięcia:

$$w(x) = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{1}{24}ql^3x - \frac{1}{12}qlx^3 + \frac{1}{24}qx^4\right)$$

Kąt ugięcia

$$\varphi(x) = w'(x)$$

$$\varphi(x) = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{1}{24}ql^3 - \frac{1}{4}qlx^2 + \frac{1}{6}qx^3\right)$$

dla $x = \frac{l}{2}$ $\varphi(x) = 0$, $\quad \varphi(0) = \frac{1}{24}\frac{ql^3}{EI_y}$

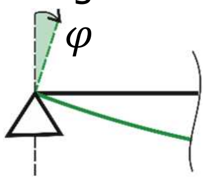
$$\varphi(l) = -\varphi(0)$$

Strzałka ugięcia:

$$w\left(\frac{l}{2}\right) = f = \frac{5}{384}\frac{ql^4}{EI_y}$$

Warunki brzegowe

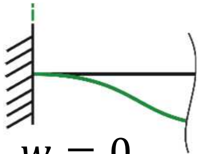
Podpora przegubowa



$w = 0$

$\varphi = w' \neq 0$

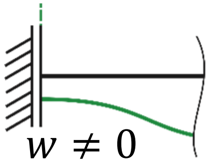
Utwierdzenie



$w = 0$

$\varphi = w' = 0$

Przesuw poprzeczny



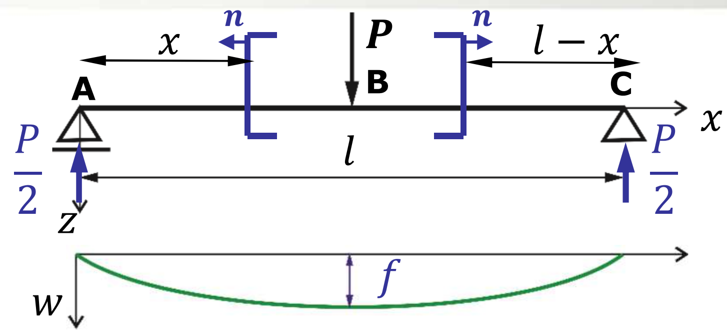
$w \neq 0$

$\varphi = w' = 0$

Wyznaczanie linii ugięcia
Warunki zszycia

Przykład 2

$$w''(x) = \frac{-M(x)}{E \cdot I_y}$$



Przedział AB

$$-EI_y w''_{AB}(x) = \overbrace{\frac{1}{2}Px}^{M(x)}$$

$$-EI_y w'_{AB}(x) = C + \frac{1}{4}Px^2$$

$$-EI_y w_{AB}(x) = D + Cx + \frac{1}{12}Px^3$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{D = 0}$$

Przedział BC

$$-EI_y w''_{BC}(x) = \overbrace{\frac{1}{2}P(l-x)}^{M(x)}$$

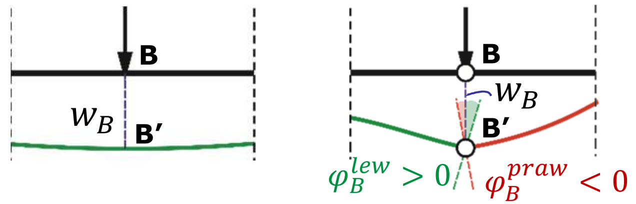
$$-EI_y w'_{BC}(x) = E - \frac{1}{4}P(l-x)^2$$

$$-EI_y w_{BC}(x) = F + Ex + \frac{1}{12}P(l-x)^3$$

Warunki brzegowe:

$$w(l) = 0 \quad \Rightarrow \boxed{F = -El}$$

Warunki zszycia



$$w_B^{lew.} = w_B^{praw.} \qquad w_B^{lew.} = w_B^{praw.}$$

$$w'^{\,lew.}_B = w'^{\,praw.}_B \qquad w'^{\,lew.}_B \neq w'^{\,praw.}_B$$

Warunki zszycia:

Równość kątów ugięć

$$w'_{AB}(l/2) = w'_{BC}(l/2)$$

$$C + \frac{1}{16}Pl^2 = E - \frac{1}{16}Pl^2$$

$$\boxed{C = E - \frac{1}{8}Pl^2}$$

Równość ugięć

$$w_{AB}(l/2) = w_{BC}(l/2)$$

$$D + C\frac{l}{2} + \cancel{\frac{1}{96}Pl^3} = F + E\frac{l}{2} + \cancel{\frac{1}{96}Pl^3}$$

$$\left(E - \frac{1}{8}Pl^2\right)\frac{l}{2} = -El + E\frac{l}{2}$$

$$\boxed{E = \frac{1}{16}Pl^2, \quad F = -\frac{1}{16}Pl^3, \quad C = -\frac{1}{16}Pl^2, \quad D = 0}$$

$$w_{AB}(x) = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{1}{16}Pl^2x - \frac{1}{12}Px^3\right),$$

$$w_{BC}(x) = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{1}{16}Pl^2(l-x) - \frac{1}{12}P(l-x)^3\right]$$

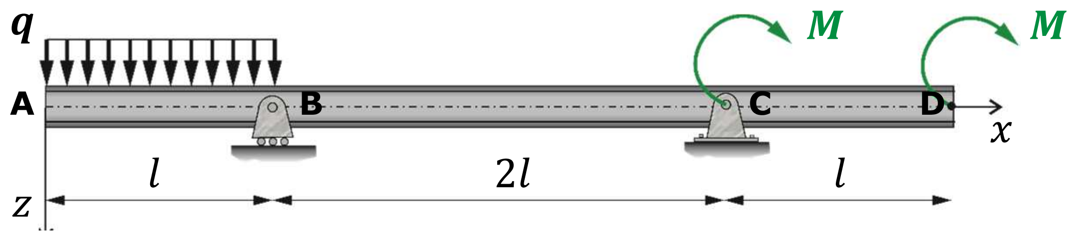
$$f = w_{AB}\left(\frac{l}{2}\right) = w_{BC}\left(\frac{l}{2}\right)$$

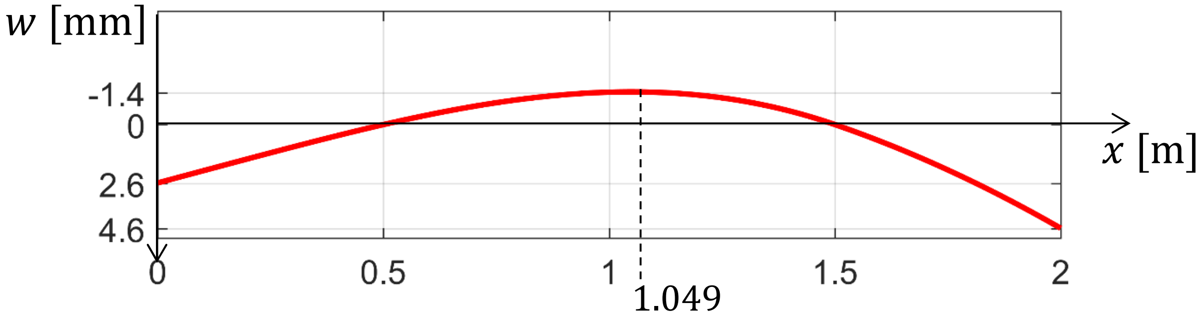
$$f = \frac{1}{48}\frac{Pl^3}{EI_y}$$

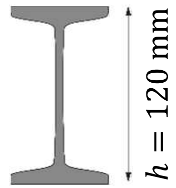
$$\varphi_A = w'_{AB}(0) = \frac{1}{16}\frac{Pl^2}{EI_y}, \quad \varphi_C = w'_{BC}(l) = \frac{-1}{16}\frac{Pl^2}{EI_y}$$

Wyznaczenie linii ugięcia
Metoda Clebscha

Przykład 3







I 120

Dane:
q=24 kN/m
M= 6 kNm
l=0.5 m
E = 200 GPa
I_y = 328 cm^3

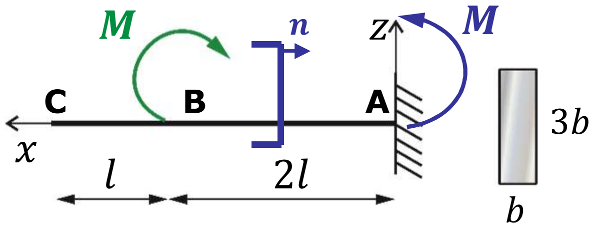
Zasady metody Clebscha:

1. Funkcja momentu w danym przedziale zawiera wszystkie składniki występujące w przedziałach poprzednich.
2. Każdy rozważany przedział włącza do formuły wyłącznie składniki w postaci $p \cdot (x - a_i)^m$, gdzie p i m są dowolnymi stałymi, natomiast a_i odciętą początku rozpatrywanego przedziału.
3. Całkowanie składników wykonujemy metodą podstawienia $(x - a_i)^m = t_i$.
4. Stałe całkowania zapisujemy na początku, gdyż należy je uwzględnić wyznaczając ugięcie w dowolnym z przedziałów

Warunek sztywności
Przykład

Przykład 4

Belka o przekroju prostokątnym ($l = 0.5\ \mathrm{m}$) została obciążona momentem $M = 2\ \mathrm{kNm}$, jak na rysunku. Zaprojektuj przekrój jeżeli dopuszczalne ugięcie f_{dop} wynosi 5 mm, a moduł Younga $E = 200\ \mathrm{GPa}$.



$$-EI_y w''(x) = -Mx^0\Big|_{AB} + M(x-2l)^0\Big|_{BC}$$

$$-EI_y w'(x) = C - Mx\Big|_{AB} + M(x-2l)\Big|_{BC}$$

$$-EI_y w(x) = D + Cx - \frac{1}{2}Mx^2\Big|_{AB} + \frac{1}{2}M(x-2l)^2\Big|_{BC}$$

Strzałka ugięcia:

$$f = w(3l) = \frac{M}{2EI_y}[9l^2 - l^2]$$

$$f = \frac{4Ml^2}{EI_y}, \quad I_y = \frac{27b^4}{12}$$

Warunki brzegowe:

$$w(0) = 0 \quad \Rightarrow D = 0$$

$$w'(0) = 0 \quad \Rightarrow C = 0$$

Warunek sztywności:

$$f = \frac{16Ml^2}{9Eb^4} \le f_{dop} \quad \Rightarrow \sqrt[4]{\frac{16Ml^2}{9Ef_{dop}}} \le b$$

$$b \ge 30.7\ \mathrm{mm} \qquad \Rightarrow b = 31\ \mathrm{mm}, \quad h = 93\ \mathrm{mm}$$

Linia ugięcia:

$$w(x) = \frac{1}{EI_y}\left[\frac{1}{2}Mx^2\Big|_{AB} - \frac{1}{2}M(x-2l)^2\Big|_{BC}\right]$$